Εισαγωγή στην τοπολογία	25-2-20 1ο Μάθημα

<u>Επανάληψη</u>: sup, inf ΑΠΕΙ I
Σύγκλιση ακολουθιών, συνέχεια.

<u>Βιβλίο</u>: Τσαμάτος

<u>Σημειώσεις</u>: Πραγματική ανάλυση, κ. Βαλέτας.
Στο e-course υπάρχουν φυλλάδια, θέματα

ΚΕΦ 1: Μετρικοί χώροι

<u>Ορισμός</u>: Έστω ένα μη κενό σύνολο $X \neq \emptyset$, ονομάζουμε <u>μετρική στο X</u> κάθε συνάρτηση $\rho: X \times X \to \mathbb{R}$ ώστε να ικανοποιούνται οι εξής ιδιότητες:

1) $\rho(x,y) \geq 0, \ \forall x,y \in X$

2) $\rho(x,y) = 0 \iff x = y$

3) $\rho(x,y) = \rho(y,x), \ \forall x,y \in X$ (συμμετρική ιδιότητα)

4) $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z), \ \forall x,y,z \in X$

Όταν η $\rho(x,y)$ είναι <u>μετρική</u> στο X το ζεύγος (x,y) λέγεται <u>μετρικός χώρος</u>. Τα στοιχεία του X λέγονται και <u>σημεία</u>. Η ποσότητα $\rho(x,y)$ (για $x,y \in X$) λέγεται <u>απόσταση του x από το y</u>. Συνήθως τα γράμματα που χρησιμοποιούμε για να συμβολίσουμε μετρικές είναι ρ, d, σ.

Παραδείγματα:

1) Η $\rho: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $\rho(x,y)=|x-y|$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$ ονομάζεται συνήθης μετρική στο $\mathbb{R}$.

Απόδειξη: Τα 1,2,3 είναι προφανής

$$4)\ \rho(x,z)=|x-z|=|x-y+y-z|\leq |x-y|+|y-z|=$$
$$=\rho(x,y)+\rho(y,z)$$

2) Η ευκλείδεια μετρική στον $\mathbb{R}^n$:

$\mathbb{R}^k=\{(x_1,\dots,x_n),\ x_i\in\mathbb{R}$ όπου $i=1,\dots,k\}$

$\forall\ \vec{x}=(x_1,\dots,x_k)$, $\vec{y}=(y_1,\dots,y_k)$

$$\rho_2(\vec{x},\vec{y})=\left(\sum_{i=1}^{k}|x_i-y_i|^2\right)^{1/2}$$

Οι ιδιότητες (1,2,3) της μετρικής είναι προφανής. Θα δούμε παρακάτω την απόδειξη του 4 (τριγωνική ανισότητα).

3) Η διακριτή μετρική. Αν X τυχαίο μη κενό σύνολο, ορίζουμε $\rho(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq y\\ 0, & x=y\end{cases}$ $\forall x,y\in X$

4) Αν (X,ρ) τυχαίος μετρικός χώρος και A μη κενό υποσύνολο του X, τότε ο περιορισμός της ρ στο $A\times A$, συμβολίζεται με ρ_A και ονομάζεται σχετική μετρική στο A από την ρ.

Άρα έχουμε $\rho_A : A\times A \to \mathbb{R}$ με $\rho_A(x,y) = \rho(x,y)$ $\forall x,y \in A$ έτσι (A, ρ_A) είναι μετρικός χώρος.

Έτσι π.χ. κάθε μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι μετρικός χώρος με τη σχετική μετρική που εισάγει σε αυτό η συνήθης μετρική

- Ομοίως κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^k$ με $A \neq \emptyset$, με την σχετική μετρική που εισάγει σε αυτό η ευκλείδεια μετρική, γίνεται μετρικός χώρος.

Μετρικές σε διανυσματικούς χώρους που ορίζεται από νόρμες.

Υπενθυμίζουμε τον ορισμό του πραγματικού διανυσματικού χώρου

Ορισμός: Πραγματικός διαν. χώρος ονομάζεται μια τριάδα $(X, +, \cdot)$, όπου X μη κενό σύνολο

$+ : X\times X \to X$ (πρόσθεση)

$\cdot : \mathbb{R}\times X \to X$ (βαθμωτός πολ/μος)

ώστε να ικανοποιούνται οι εξής συνθήκες:

i) $(x+y)+z = x+(y+z)$ $\forall x,y,z \in X$

ii) $x+y = y+x$

iii) $\exists\, 0 \in X : x+0 = x = 0+x$, $\forall x \in X$

iv) $(\forall x \in X)\ (\exists (-x) \in X) : x+(-x) = 0$

v) $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x,y \in X$

vi) $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x$, $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}$, $\forall x \in X$

vii) $\lambda\cdot(\mu x) = (\lambda\mu)x$, $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}$, $\forall x \in X$

viii) $1\cdot x = x$ $\forall x \in X$.

Παραδείγματα δ.χ.:

α) Ο $\mathbb{R}^k$ με πράξεις κατα σημείο

β) Ο χώρος των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές.

γ) Για $X \neq \emptyset$ το $F(X) = \{f: X \to \mathbb{R}$ συνάρτηση$\}$ με πράξεις κατα σημείο.

δ) Αν $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$: $C[a,b] = \{f: [a,b] \to \mathbb{R}, f:$ συνεχής$\}$ με πράξεις κατα σημείο.

ε) $C_{00}(\mathbb{N}) = \{(a_1, a_2, \dots,)\ a \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots\ \exists i_0 \in \mathbb{N}: a_i = 0\ \forall i > 0\}$

Ορισμός: Έστω X πραγματικός δ.χ. Ονομάζουμε νόρμα (ή στάθμη) μια συνάρτηση $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$, ώστε να ικανοποιούνται οι παρακάτω ιδιότητες:

α) $\|x\| \geq 0,\ \forall x \in X$

β) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0\ \forall x \in X$

γ) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in X$

δ) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|\ \forall x, y \in X$ (τριγ. ανισότητα).

Το ζεύγος $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται χώρος με νόρμα.

Μετρική που επάγεται απο νόρμα

Αν $(X, \|\cdot\|)$ χωρος με νόρμα η απεικόνιση $\rho = \rho_{\|\cdot\|}: X \times X \to \mathbb{R}$ με τυπο $\rho(x,y) = \|x-y\|$. Άμεσα είναι μετρική στο X.

Απόδειξη: α) $\rho(x,y) = \|x-y\| \geq 0\ \forall x, y \in X$

β) $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow \|x-y\| = 0 \Rightarrow x-y = 0 \Rightarrow x = y$

γ) $\rho(x,y) = \|x-y\| = \|(-1)(y-x)\| = |-1| \cdot \|y-x\| = \|y-x\| = \rho(y,x)$

δ) $\rho(x,z) = \|x-z\| = \|(x-y)+(y-z)\| \leq \|x-y\| + \|y-z\| = \rho(x,y) + \rho(y,z)$.

Παραδείγματα: α) Η ευκλείδεια νόρμα $\|\cdot\|_2$ στον $\mathbb{R}^k$.

Για $\vec{x}=(x_1,\dots,x_k)\in\mathbb{R}^k$ ορίζουμε να είναι

$$\|\vec{x}\|_2=\left(\sum_{i=1}^{k}|x_i|^2\right)^{1/2}$$

β) Στον $\mathbb{R}^k$ ορίζεται $\|\cdot\|_1$. Για $\vec{x}=(x_1,\dots,x_k)\in\mathbb{R}^k$ ορίζουμε να είναι: $\|\vec{x}\|_1=\sum_{i=1}^{k}|x_i|$

γ) Στον $\mathbb{R}^k$ ορίζεται $\|\cdot\|_\infty$. Για $\vec{x}=(x_1,\dots,x_k)\in\mathbb{R}^k$ ορίζουμε να είναι: $\|\vec{x}\|_\infty=\max\{|x_i|, i=1,\dots,k\}$

δ) Αν $1<p<+\infty$ ορίζεται στο $\mathbb{R}^k$, η νόρμα $\|\cdot\|_p$ ως εξής: για $\vec{x}=(x_1,\dots,x_k)\in\mathbb{R}^k$ να είναι $\|\vec{x}\|_p=\left(\sum_{i=1}^{k}|x_i|^p\right)^{1/p}$

Οι νόρμες $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$ αποδεικνύεται εύκολα ότι είναι νόρμες στον $\mathbb{R}^k$. Για την $\|\cdot\|_p$, $1<p<+\infty$ η μόνη δυσκολία στην απόδειξη είναι η ιδιότητα της τριγωνικής ανισότητας.

Απόδειξη (Για $p=2$):

Ανισότητα Cauchy-Schwartz: Έστω $x_1,\dots,x_k$ και $y_1,\dots,y_k$ πραγματικοί αριθμοί, τότε:

$$\sum_{i=1}^{k}|x_i\cdot y_i|\le\left(\sum_{i=1}^{k}|x_i|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{k}|y_i|^2\right)^{1/2}$$

Θέτουμε $B=\sum_{i=1}^{k}|x_iy_i|$ και $A=\sum_{i=1}^{k}|x_i|^2$, $C=\sum_{i=1}^{k}|y_i|^2$

Θέλουμε ν.δ.ο. $B^2 \leq A \cdot C$ ή ισοδύναμα $(2B)^2 \leq 4AC$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $P: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$P(\vec{x}) = (\lambda|x_1|+|y_1|)^2 + \cdots\cdots + (\lambda|x_k|+|y_k|)^2 = \sum_{i=1}^{k} (\lambda|x_i| - |y_i|)^2$$

Παρατηρώ ότι $P(\lambda) \geq 0 \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

$$P(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} (\lambda^2|x_i|^2 + 2\lambda|x_i y_i| + |y_i|^2) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^2\right) \cdot \lambda^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{k} |x_i \cdot y_i|\right) \cdot \lambda + \sum_{i=1}^{k} |y_i|^2 =$$

$$= A\lambda^2 + 2B\lambda + C$$

Επειδή $P(\lambda) \geq 0$ τότε $\Delta < 0$. Διακρίνω περιπτώσεις:

i) Αν $A=0$ τότε $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$ και άρα η ισότητα ισχύει.

ii) Αν $A > 0$ το $P(\lambda)$ είναι γινόμενο με συντελεστές του λ θετικούς και $P(\lambda) \geq 0 \ \forall \lambda \geq 0$.

Άρα έχω διακρίνουσα αρνητική ή μηδέν (≤ 0) δηλαδή $(2B)^2 - 4AC \leq 0$ και η απόδειξη τελείωσε.

• Η $\|\cdot\|_2$ είναι πράγματι νόρμα.

Απόδειξη (τριγωνικής ανισότητας): Αν $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_k)$, $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k$, τότε:

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{k} |x_i + y_i|^2 \leq \sum_{i=1}^{k} (|x_i| + |y_i|)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (|x_i|^2 + 2|x_i y_i| + |y_i|^2) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} |x_i|^2 + 2\sum_{i=1}^{k} |x_i|\cdot|y_i| + \sum_{i=1}^{k} |y_i|^2 \overset{(C-S)}{\leq}$$

$$\|\vec{x}\|_2^2 + 2\|\vec{x}\|_2 \cdot \|\vec{y}\|_2 + \|\vec{y}\|_2^2 = (\|\vec{x}\|_2 + \|\vec{y}\|_2)^2 \Rightarrow$$

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|_2^2 \leq (\|\vec{x}\|_2 + \|\vec{y}\|_2)^2 \Rightarrow \boxed{\|\vec{x}+\vec{y}\|_2 \leq \|\vec{x}\|_2 + \|\vec{y}\|_2}$$

<u>Άσκηση</u>: Έστω (X, ρ) μ.χ.

α) Αν $\alpha, \beta, \gamma \in X$: $|\rho(\alpha,\beta) - \rho(\alpha,\gamma)| \leq \rho(\beta,\gamma)$

β) Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in X$ τότε: $|\rho(\alpha,\beta) - \rho(\gamma,\delta)| \leq \rho(\alpha,\gamma) + \rho(\beta,\delta)$

<u>Λύση</u>: α) $|\rho(\alpha,\beta) - \rho(\alpha,\gamma)| \leq \rho(\beta,\gamma) \Leftrightarrow$

$$-\rho(\beta,\gamma) \leq \rho(\alpha,\beta) - \rho(\alpha,\gamma) \leq \rho(\beta,\gamma)$$

(1) (2)

(1): Ισχύει ότι: $\rho(\alpha,\beta) \leq \rho(\alpha,\gamma) + \rho(\gamma,\beta) = \rho(\alpha,\gamma) + \rho(\beta,\gamma)$

$\Rightarrow \rho(\beta,\gamma) \geq \rho(\alpha,\beta) - \rho(\alpha,\gamma)$

(2) $\rho(\alpha,\gamma) \leq \rho(\alpha,\beta) + \rho(\beta,\gamma) \Rightarrow -\rho(\beta,\gamma) \leq \rho(\alpha,\beta) - \rho(\alpha,\gamma)$

Άρα ισχύει το ζητούμενο (α).

β) Στο επόμενο μάθημα.